数理解析研究所講究録 1444 巻 2005 年 103-115

平成16年8月23日-27日
第8回「数学史の研究」
京都大学数理解析研究所

暦算家河野通禮と『八線表根新術』

前橋工科大学・工学部　小林　龍彦（Tatsuhiko Kobayashi）
Maebashi Institute of Technology

1　暦算家河野通禮の生涯と業績から

暦算家河野通禮(生没不詳)は、通称を主計助とし[1]、字は子典[2]。姓は初め越智であったが、後に河野を名乗ったようである。河野が文化 6(1809)年に刊行した『渾天新語』の凡例には“文化元年甲子歳夏六月　正六位上行主計助越智宿禰通禮”とあり、また同書に“文化紀元甲子孟冬”の日付をもって序文を与えた皆川愿は“河野通禮”と記していることから推測すれば、越智から河野への改姓は文化元(1804)年であったと考えられる。諱は通禮、号を龍崗あるいは穀詒堂とする[3]。

河野の経歴については現在のところ詳しくは分からないが、文化6年の『渾天新語』やその他の史料から僅かに窺うことは可能である。

その河野の経歴について、まず『渾天新語』の凡例には“正六位上行主計助越智宿禰通禮”とあった。また同書の本文第1丁では“平安　龍崗河野通禮”と言っている。そして、本論文の主題として取り上げる写本「八線表根新術」の第1丁には“内舎人正六位下行宮少丞越智宿禰通禮編著[4]”と書いてあることから、河野は京都に住した暦算家で、官職を内舎人、位階が正六位下から正六位上に昇位した下級貴族であったことが分かる。さらに暦算学の系統については、やはり『渾天新語』に与えた最里公濟の後叙によれば“子自髫髪好学算法、... 欲修天文暦学等、曽執贄入司天監安倍卿之門[5]”と著されているから、幼少の頃の算学の師は兎も角として、後に暦学を学ぶために司天監の安倍家に贄を執ったことが判明する[6]。

現在までに確認できる河野通禮の研究業績としては先述の『渾天新語』のほか、次の写本の中に見出すことができよう[7]。

河野通禮編、茶室實壽校「応元暦書」(文化 2(1805)年秋序)[8]
越智通禮編著「八線表根新術」(年紀不明)
河野通禮、下村政良推算「拠消長法用数」(年紀不明)[9]

また、『渾天新語』に掲載される書林の広告によれば

井口常範述、河野龍岡先生校正　全部五冊
運気暦術天文図解

とする出版も企画されていたようである。筆者は今のところ『運気暦術天文図解』の存在を確認していない。

さて上記の河野通禮の業績中、筆者が本論文で紹介しようとする一冊は「八線表根新術」である。「八線表根新術」は写本の書名が示すとおり、三角関数表の正弦値の算出法

について述べたものであるが、そこには著者の河野が“新術”と誇示する新法が採用されているのである。その新法とは現代の倍角公式や三倍角公式にあたるが、それらの公式の表記は今日とまったく同じ形式となっている。そして、河野はそれらの新法に対して、嘗て建部賢弘が「弧率」や「算暦雑考」などで使用していた“倍術”“折術”“接術”や“截術”などの名称をもって呼び宛てている。この事実は、河野が建部の研究書を読み、建部の弧背の計算法で用いられた諸術が現代公式と同一である、と理解していたことを意味しよう。

筆者はこの間、近世日本における三角法の研究に従事してきたが、河野通禮が主張するような“新術”をもって三角関数表の作成を言及する暦算家を寡聞にして知らない。このことが本論文に「八線表根新術」を紹介しようとする所以である。

2　「八線表根新術」の所在と諸本間の比較

これまでの筆者の調査では、写本「八線表根新術」は次の諸本の存在が確認できている。以下に諸本間の書誌的情報を含めて、若干の検討を与えておくことにしよう。

(1)「八線表根新術」(『高樹文庫資料目録』分類番号 624)

富山県新湊市の新湊市博物館の高樹文庫に収蔵される一冊である(以下、高樹文庫本と呼ぶ)。前項で紹介したように本書の第1丁には内題“八線表根新術”に続けて、“内舎人正六位下行宮少丞越智宿禰通禮編著”とする著者名が書かれている。また同書の最終丁の末尾には“和横艾淹茂歳仲冬初一于穀詒堂書之”とある。この奥付の年紀は一見しただけでは読みとれないが、幸いにも“横艾”を壬、“淹茂”を戌とする朱記が振られ、併せて"即享和二壬戌歳十一月也"(写真1参照)とも朱記されていることから、「八線表根新術」は少な

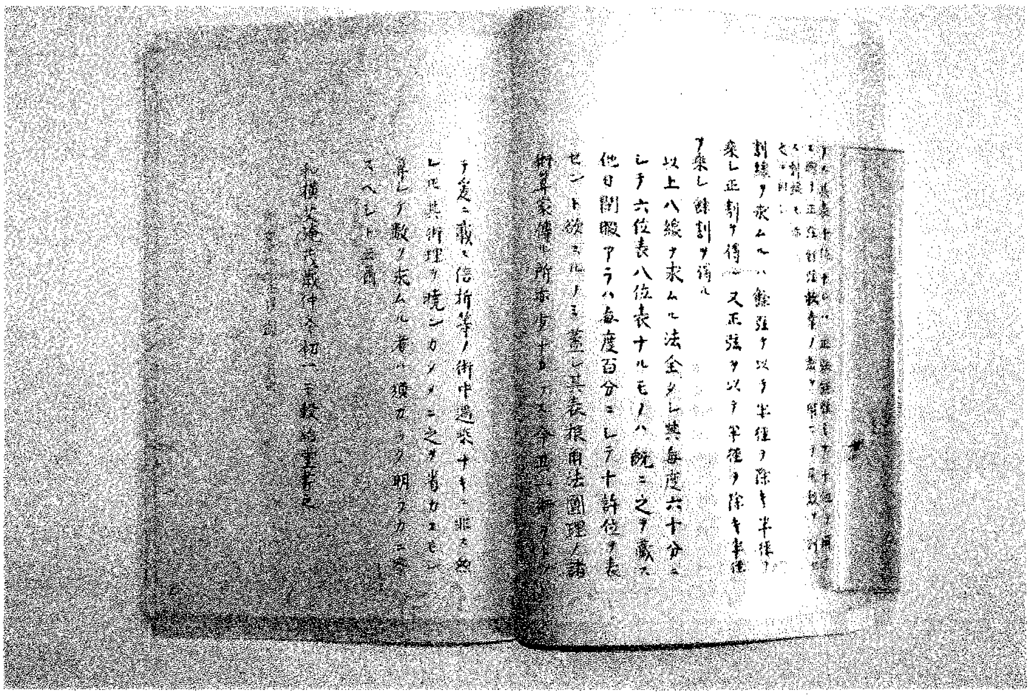

写真1　「八線表根新術」(高樹文庫本)最終丁

くとも享和 2(1802)年には成立していたと思われる。また“于穀詒堂書之”ともあるから、高樹文庫本は河野通禮の直筆本とも考えられる。

現在のところ如何なる経緯で「八線表根新術」が富山の和算家石黒信由(1760-1836)に伝わったは不明であるが、河野の門人茶室實壽が前師を西村太冲(1767-1853)とすることから、西村の手を経て石黒に伝わったことも考えられる。

その石黒は文政 7(1824)年に「八線表根新術之解」を著し「八線表根新術」の折術、接術や截術について図解している[10]。

(2)「八線表根新術」(東北大学付属図書館収蔵林文庫:登録番号 2659)

東北大学林文庫蔵の「八線表根新術」(以下、林文庫本と呼ぶ)の第 1 丁には、“内舎人正六位下行宮[11]少丞越智通禮著”とする記名が存在する。高樹本と比較して見ると、“宿禰”とする姓と“編”の文字が削除されている。また、林文庫本には写本の書写年や伝書に係わる情報は記述されていない。以下に取り上げる諸本と比較して、高樹文庫本と同様に正確に書写されている。ただし最終丁には、石寛道による次のような解説がある。

西洋法算法、拙事可知也。如図割之者算法安且密細也。円真中、則央也。一度法百分也。不用算、而直知之央、真ヨリ十二方亦一万方、皆六十度也。…

更に石寛道の解説に続いて、“右者石寛道書入ノ解写也”とする森嶋賞胤の識語と石の解説を補足する森嶋賞胤の書き入れが存在する。

(3)「八線表根新術」(日本学士院蔵書:登録番号 6426)

日本学士院に収蔵される「八線表根新術」(以下、日本学士院本と呼ぶ)の第 1 丁には“名古屋市西菅原町小出蔵書”とする蔵書印が押されている。また、“小出良金蔵”とする印もある。著者名、書写年紀ともにない。学士院本は誤記が散見される。

(4)「八線表根新術」(国立天文台付属図書館蔵書:登録番号 370308)

国立天文台付属図書館に収蔵される「八線表根新術」(以下、天文台本と呼ぶ)には著者名はない。第 1 丁に蔵書印が押されているが、いまのところ筆者は判読できていない。ただし、最終丁には次のような書写年と筆者名が書かれている。

時也天保十一庚子晩夏写於京北高倉客舎
天愛子　策進

天文台本の奥付の年紀天保 11 年は西暦 1840 年にあたる。暦算家と思われる天愛子策進の経歴は不明である。しかし、京北の高倉の客舎で書写したと記することから、都に在住していた河野通禮の所蔵本から直接書写したとも考えられる。

なお、東京天文台天文計算部暦研究課の記録では天文台本は、1962 年 7 月 21 日大阪の古書店松泉堂より購入したものである。

上記(1)から(4)の諸本のほかに、東北大学付属図書館所蔵林文庫には二冊の“越智通禮著「八線表根新術」”が存在する。(年紀不明、登録番号 2659、登録番号 2660)これら二冊については今のところ未調査である。

3 「八線表根新術」の現代的解説

さて、「八線表根新術」は、その表題が明らかに示すとおり三角関数表の作成法を解説するものであるが、先にも言及したように、そこには河野通禮が“新術”と強調する方法も含まれているのである。以下に、「八線表根新術」の原文にそって内容を解説し、河野が誇示する新法のなんたるかを解明することにしよう。なお、筆者が入手した諸本間には字句の異同が若干存在するが、前2項で指摘したように高樹文庫本は河野通禮の直筆本の可能性があること、また書写年紀が特定できることなどから高樹文庫本を底本として使用することにした。また原文の引用にあたっては、原文中の割書は活字ポイントを小さくして表記したこと、また、必要に応じて現代式を以て要約して著したことを予めお断りしておく。

その「八線表根新術」はつぎの書き出しをもって始まる。

> 夫、八線表トハ一平圓ノ周ヲ均シク三百六十ニ分チ、又其一ヲ均シク六十ニ分ツテ、周天三百六十度、毎度六十分ニ合ス。而シテ、其平円四分ノ一、即チ周天ノ一象限内ニ於テ図ノ如ク八線ヲ設ケテ、初度０分ヨリ八十九度六十分即九十度ニ至ツテ毎度毎分ノ諸線ヲ求メテ、是ヲ挙ルノ表ナリ。其八線、正弦ナリ、正矢ナリ、正切ナリ、正割ナリ、餘弦ナリ、餘切ナリ、餘割ナリ。内正矢、餘矢ノ二線を列セス、外六線ヲ列ス。

まず、三角関数表の作成において最も基本となる線分名称を第一象限図を用いて解説を与える。線分の名称は正弦に始まって八つの名称が与えられるが、その内の正矢と餘矢を除いて六線を用いることが主張される。もっとも

正矢＝半径－餘弦、餘矢＝半径－正弦

とすることで、正矢と餘矢が求められることも明記している。これら八線の名称の解説に続けて、三角関数表の有効桁数と円の半径の値との関係が若干触れられる。そして本天の半径を 10,000,000 として、三角関数表の桁数を 8 桁とすることも指摘される。すなわち

> 今、八位ヲ表ス。故ニ、半径定メテ一千萬トス。即チ新法暦書、日月星ノ本天半径皆一千萬トスルモノ総テ此表ヲ用ルノ率ナリ。

上記引用文中に見える“新法暦書”は、寛政 8(1796)年に吉田秀升、山路徳風および高橋至時らが京都の土御門泰栄の下にあって、『暦象考成』の暦理に基づいて作暦した「暦法新書」八巻[12]を指しているのであろうか。江戸天文方の高橋至時らの主導によって改修された「暦法新書」の暦理に従って、翌寛政 9 年 11 月 18 日に改暦の宣下が勅せられ「寛政戊午元暦」が施行されることになった。引用文中の“新法暦書”が高橋至時らによる「暦法新書」を指しているのであれば、高樹文庫本の「八線表根新術」にある享和 2 年の年紀は正しいことになる。そして、石黒信由が「八線表根新術」に解説を与えた「八線表根新術之解」を文政 7 年に著すことも時間的な矛盾はない。しかし、引用文中の“新法暦書”が天保 13(1842)年 9 月、天文方澁川景佑と足立信頭が編集した「新法暦書」[13]を指しているものであるとすれば、高樹文庫本の享和 2 年の年紀は疑わしいと言わなければならない。

さて、本文の解説に戻ることにしよう。「八線表根新術」は三角関数表の数値について言及した後、表中の“正”と“餘”が順逆の関係にあること、正弦が求まれば三平方の定理から余弦が求まること、さらには正弦と余弦が求まれば比例によって残りの四線が求まることを述べる。そして、それら三角法の基本の解説に続いて梅文鼎の『暦算全書』に載る正弦値の求め方について次のように言及する。

其正弦ヲ求ル法暦算全書等ニ載タリ。今、其術ヲ考ルニ皆円内ニ角ヲ容レ、其円径ノ数二十萬トシ、各角面ノ数ヲ求テ通弦トス …、通弦ヲ折半シテ正弦トス …。蓋、其法真密ナリトイヘドモ、亦、甚タ繁ニテ迂ナリ。

いま、ここで河野が与えた正弦値の計算法を翻訳すれば次のようになろう。

いま図1において、△OAB の頂点 O を円に内接する正 n 角形(ただし、n=3,4,5,...)の中心とし、正 n 角形の1辺 AB の長さを a_n で表せば、辺 AB の垂線 OC は a_n を二分する。そして、360 度を内接正多角形の角数 n で割れば∠AOB を得る。この時、辺 AB を∠AOB に対する“通弦”と呼ぶ。また、通弦を二分する垂線 OC によって∠AOC の正弦値 AC が得られる。

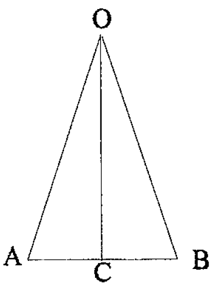

図1

上記の方法はまさしく円に内接する正多角形から正弦値を求めることに他ならない。そして河野は、この方法は梅文鼎の『暦算全書』やその他の書籍に見えているとも言う。『暦算全書』(雍正元:1723 年刊)は、16 世紀後半以降、イエズス会宣教師によってもたらされた西洋の天文学と数学知識を中国の伝統的暦算思想に還元して吸収しようとしたもので、わが国へは享保 11(1726)年に舶載され、これ以後多くの日本の暦算家に愛読される暦算書となった。河野が『暦算全書』に載る三角関数表の作成法について“其法真密ナリトイヘドモ、亦、甚タ繁ニテ迂ナリ”と難じたことは、彼がこの暦算書を読んでいたことの証左となる。

では河野は『暦算全書』のどの部分を読み、何をもって迂遠と非難するに至ったのであろうか。

ここで梅文鼎の『暦算全書』に著された三角関数表の作成法を概観しておこう。『暦算全書』[14]は 18 世紀前半の東アジアにあって平面・球面三角法の原理を豊富な応用例によって解説した暦算書であったが、河野が指摘する三角関数表の作成法はこの全書の『解八線割圓之根』において詳説されている。いま、『解八線割圓之根』を繙くとこれの序文となる“八線割圓説”において梅文鼎は“割圓八線表、雖久傳于世、而立法之根、未得専書剖晰[15]”と述べ、未だ三角関数表の作成法を教える専書がないと訴えている。そして本文の“立表之根有七”では、円に内接する正多角形の一辺を通弦として、これの長さを求めることから表を作成する方法が述べられる。ここで求長法の対象となった正多角形とそれらの通弦はつぎの七つであった。

表根一　圓内作六等邉切形、求得六十度之通弦
表根二　圓内作四等邉切形、求得九十度之通弦
表根三　圓内作十等邉切形、用理分末線、求得三十六度之通弦
表根四　圓内作五等邉切形、求得七十二度之通弦
表根五　圓内作三等邉切形、求得一百二十度之通弦、半之為六十度正弦
表根六　圓内作十五等邉切形、求得二十四度之通弦
表根七　圓内作九等邉切形、求得四十度之通弦、新増[16]

これら七法は、いずれも円に内接する正六角形、正四角形、正十角形、正五角形、正三角形、正十五角形、正九角形の一辺（通弦）からそれぞれの角に対応する正弦値を求めること方法を表している。そして上記の表根七の正九角形の通弦の求長法に続けて、“付求一度之正弦。一度為全円三百六十之一。亦名三百六十等辺内切形”として、1 度の正弦値の求め方も解説している[17]。また、つづく“作表之法有七”の“表法二[18]”の項では

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

とする倍角公式が、さらに“表法四[19]”では

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}}{2}$$

とする半角公式などが証明されるに及んでいる。

確かに『解八線割圓之根』の方法では、内接正多角形の通弦を分割して正弦値を得ようと言うのであるから迂遠であることは否めない。ここに河野の不満があったと言うことになろう。

再び「八線表根新術」に立ち返ろう。先に見たように河野は『暦算全書』の求長法を非難した後に次のように述べる。

今、本朝算学ノ盛ンナル他邦ニ卓越セリ。故ニ、円理角法ノ密術家々ニ是ヲトナフ。爰ニ、一通術ヲ載テ円中ノ諸角面、意ニ随テ求メ得ルコト左ノ如シ。

すなわち、近世わが国の数学は“他邦”の数学よりも優れており、ことに暦算諸家が開発した“円理角法”は家々に秘術として温存されている。その“円理角法”では円に内接する正多角形の a_n を任意に求めることが可能である、と断言するのである。

ここで河野が与えた方法を現代的に解説すれば以下のように書き表すことができる。

いま、半径を 10,000,000 とする円に正 n 角形(ただし、n=3,4,5,...)を内接させる。この時、“其角面寸(a_n)ヲ求ル術”を得るには、まず

$$原数=\frac{6}{n}=A,\quad 率=A^2=\alpha,$$

と置いて、つぎの漸化式をつくる。

$$\frac{(1-\alpha)A}{4\cdot 6}=一差、\frac{(9-\alpha)一差}{8\cdot 10}=二差、\frac{(25-\alpha)二差}{12\cdot 14}=三差、\frac{(49-\alpha)三差}{16\cdot 18}=四差、\cdots、$$

$$\frac{(289-\alpha)八差}{36\cdot 38}=九差、\cdots$$

これらの漸化式を作り得た後

其所得ノ逐差ヲ相併セテ併差トス。逐差ヲ求ルコト愈多レハ真数イヨイヨ多位ニ合シテ求ムヘシナレハ、即真数ニ合スルコト十許位ナリ。内八位ヲトリ而シテ其次位五已上ハ進メテートシ、五以下ハ之ヲ棄ス。
原数ヲ列シ併差ヲ加ヘ併差負ナルモノハコレヲ減ス、所容ルノ角面寸ヲウル。

とする操作を行えばよい。すなわち、得られた各差をつぎつぎと加え併せて、それらを原数に加えれば

$$a_n=\frac{6}{n}+\frac{(1-\alpha)A}{4\cdot 6}+\frac{(9-\alpha)一差}{8\cdot 10}+\frac{(25-\alpha)二差}{12\cdot 14}+\frac{(49-\alpha)三差}{16\cdot 18}+\cdots \qquad (1)$$

とする式が得られる。これが角面 a_n を求めるための式である。

以上が河野が a_n を求めるために与えた計算式であるが、いま上記の(1)式に、最初に定義した原数、率および各差を代入してみると

$$a_n=\frac{6}{n}\left\{1+\frac{1}{4\cdot 6}\left(1-\left(\frac{6}{n}\right)^2\right)+\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\left(1-\left(\frac{6}{n}\right)^2\right)\left(3^2-\left(\frac{6}{n}\right)^2\right)-\cdots\right\}$$

とする級数展開式を得ることになる。ここに及んで河野は

即、通弦トス。コレヲ折半シテ正弦トシ、七位ヲ進テ半径一千萬ノ比トス。

と結ぶのである。

そして河野は、正弦値がどのようにして得られるのかを確認するために、(1)に数値を代入して検証しようとするのである。まずは $n=3$ の時からとなる。以下の計算も現代的に書き換えながら簡略に示しておこう。

今、左ニ正弦数件ヲ求メテ其例ヲ示ス。
$n=3$（即120度通弦、60度正弦、亦30度余弦）のとき。
原数＝2（正）
一差＝0.25（負）

二差＝0.015625（負）

⋮

十五差＝0.00000000000093（負）

併差＝0.26794919243105

通弦（a）＝1.73205080756895

正弦＝0.866025403784475

筆者補注:n=3の七差の計算に関して、石黒本はつぎのような頭書きを与えている。

七差以下ハ其数一位サケテ書スモノハ書誤ナリ。按スルニ算法古今通覧ノ角術ニ書誤アルコトヲ不改シテ其侭ニ写ト見ヘタリ。石黒氏校之

頭書に表れる石黒の指摘については稿を改めて報告するつもりである。

$n=4$（即90度通弦、45度正弦、亦45度余弦）のとき。

原数＝1.5（正）

一差＝0.078125（負）

二差＝0.006591796875（負）

⋮

十五差＝0.000000000000477（負）

併差＝0.08578643762676

通弦（a）＝1.4142135623732

正弦＝0.7010678118662

$n=5$（即72度通弦、36度正弦、亦54度余弦）のとき。

原数＝1.2（正）

一差＝0.022（負）

二差＝0.002079（負）

⋮

十五差＝0.00000000000163（負）

併差＝2.4429495415024

通弦（a）＝1.175570504584976

正弦＝0.587785252292488

$n=6$（即60度通弦、30度正弦、亦60度余弦）のとき。

原数＝1（正）

一差＝0.00000000000000

二差＝

⋮

併差＝0.00000000000000

通弦（a）＝10,000,000

正弦＝5,000,000

$n = 8$(即 45 度通弦 22 度 30 分正弦、亦 67 度 30 分余弦)のとき。

原数＝ 0.75(正)

一差＝ 0.013674875(正)

二差＝ 0.00144195556640(正)

⋮

十五差＝ 0.00000000000125(正)

併差＝ 0.01536686472999

通弦(a)＝ 0.76536686472999

正弦＝ 0.382683432364996

⋮

この様に河野は、一差から十五差までの各項を逐次計算したのちに、これら 15 項の和を原数と加減することで通弦を得ようとするのである。そして得られた通弦を二分すれば正弦値が得られることになる。こうした計算を正九角形、正十一角形、正十二角形、正十五角形まで実行した上で、“十五角以上之ヲ略ス”と記するに至る。その上でつぎのように続ける。

然シテ、其容ル角数ニ応セザル度分ハ、皆、或ハ倍シ、或ハ折シ、或ハ接シ、或ハ截シテ各正弦ヲ求ム。

と述べて、$360/n$ が割り切れない場合についての解決策を提示するのである。すなわち、倍術、折術、接術、截術の 4 術がその解決法に相当する。これの 4 術も簡略に書き換えながら見ていくことにしよう。なお、文頭の題意は筆者が便宜的に与えたものである。4 術の筆頭は倍術である。

倍術

〔題意〕$2r = 20{,}000{,}000$ の時、1 度(A)の 2 倍の正弦値を求める方法を示せ。

いま、$2r = 20{,}000{,}000$ とする時の 1 度の正弦値は 174,524 であるが、これの 2 倍の正弦を求めるには、まず

$$(2\sin A)^2/2r = \mathrm{versin}2A. \tag{2}$$

とおく。ここで(2)式から半径を引くと

$$r - \mathrm{versin}2A = \cos 2A = \sin(90 - 2A) \tag{3}$$

となり、餘弦あるいは正弦値が得られる。よって

$$r^2 - (\cos 2A)^2 = (\sin 2A)^2 \tag{4}$$

とすれば、1 度の 2 倍の正弦値が得られる。

また上記の課題に続けて、倍術にはつぎの問題も含まれている。

〔題意〕 $2r = 20{,}000{,}000$ の時、3 度(A)の 3 倍の正弦値を求める方法を示せ。

いま、$2r = 20{,}000{,}000$ とする時の3度の正弦値は523,360であるが、これの3倍の正弦を求めるには

$$\sin 3A = \{3(2r^2) - 4(\sin 2A)^2\}\ \sin A\ /\ (2r)^2 \tag{5}$$

と求めればよい。また

$$\cos 3A = \{3(2r^2) - 4(\cos 2A)^2\}\cos A\ /\ (2r)^2.$$

でも求められる。

ここまでが原文に従って倍術を忠実に再現した式である。これらの式から直ちに分かるように、倍術の意味は与件の A 度を2倍もしくは3倍化した時の正弦値を求める方法を公式として著したもので、(4)式は倍角公式、(5)式は三倍角公式と全く一致する。

つぎは折術である。

折術

〔題意〕$2r = 20{,}000{,}000$ の時、5度(A)の1/2倍の正弦値を求める方法を示せ。

いま、$2r = 20{,}000{,}000$ の時の5度の正弦値は871,557であるが、これの1/2の正弦値を求めるのは、まず

$$(\sin A)^2$$

を得る。これより

$$r^2 - (\sin A)^2 = (\cos A)^2$$

を得て、半径より減じれば

$$\{r - (\cos A)^2)\} = \mathrm{versin} A \tag{6}$$

として、正矢 A が得られる。(6)式に $2r$ を掛け、平方に開いて1/2すれば

$$2r\ \{r - (\cos A)^2)\}\ /\ 4 = (\sin A)^2. \tag{7}$$

折術は与件の A 度を1/2倍にした時の正弦値を求める公式を示したもので、(7)式は半角公式にあたっている。

つぎは接術である。

接術

〔題意〕$2r = 20{,}000{,}000$ の時、3度(A)と4度(B)を併せた時の正弦値を求める方法を示せ。

いま、$2r = 20{,}000{,}000$ の時の3度の正弦値は523,360、4度の正弦値は697,565であるが、これらの和を求めるには、まず

$$\sin A = \mathrm{versin} A,\ \sin B = \mathrm{versin} B$$

とおき、これより

$$\{(2r\text{-}2\mathrm{versin} A)\sin B + (2r\text{-}2\mathrm{versin} B)\sin A\}/2r = \sin(A + B) \tag{8}$$

と求めればよい。また

$$\{(2r\text{-}2\mathrm{versin} B)\mathrm{versin} A + 2\sin A\sin B\}/2r = \mathrm{versin} A \tag{9}$$

を得て、(9)に $\mathrm{versin} B$ を加えればよい。すなわち

$$\mathrm{versin} A + \mathrm{versin} B = \sin(A+B). \tag{10}$$

接術は二つの異なる角 A と B の和を求める公式を示したもので、(8)式は加法定理に他ならない。

最後が截術である。

截術

〔題意〕$2r$ = 20,000,000 の時、15 度(A)から 4 度(B)を引いた時の正弦値を求める方法を示せ。

いま、$2r$ = 20,000,000 の時の 3 度の正弦値は 697,565、15 度の正弦値は 2,588,190 であるが、これらの差を求めるには

$$\{(2r - 2\mathrm{versin}B)\sin A - (2r - 2\mathrm{versin}A)\sin B\}/2r = \sin(A - B) \tag{11}$$

と求めればよい。また

$$\{(2r - 2\mathrm{versin}A)\mathrm{versin}B - 2\sin B\sin A)\sin B\}/2r = \mathrm{versin}B \tag{12}$$

を得て、versin$A$ から(12)を引けばよい。すなわち

$$\mathrm{versin}A - \mathrm{versin}B = \mathrm{versin}(A - B). \tag{13}$$

截術は異なる二つの角 A と B の差を求める公式を示したもので、(11)式も加法定理に相当することになる。

河野は、これらの倍術、折術、接術、截術の 4 術による正弦値の求め方を述べた後、正切と餘切さらには正割線と餘割線の求め方をつぎの比例式で示すのである。

正切＝(正弦/餘弦)$2r$
餘切＝(餘弦/正弦)$2r$
正割＝(r/餘弦)r
餘割＝(r/正弦)r

そして最後に河野はつぎのように指摘して、「八線表根新術」を閉じるのである。

蓋シ其表根角法円理ノ諸術算家傳ル所、亦少ナカラス。今其一術ヲトツテ、爰ニ載ス倍、折等ノ術中、過乗ナキニ非ス。然テドモ其術理ヲ暁シカタメニ之ヲ省カス。モシ算シテ数ヲ求ムル者ハ須カラク明ラカニ察スヘシト云爾。

4 まとめ

河野通禮が暦学研究を始めた 19 世紀初頭は、18 世紀前半に伝わった三角法が江戸のみならず広く国内に普及していく時代となっていた。このような歴史経緯を踏まえれば河野の三角法の研究は新領域を切り開く華々しい成果を含んだものでは決してなかった。あくまでも従来の角術研究から三角関数表を作るための一斑を解説したものであり、使用された三角法の公式も全くの基本形に過ぎないのである。

しかしその一方で、河野が採用した表記法は簡易にして、今日の三角法の用語を用いて書き表していることは注意を要しなければならない。漢字表記以外の記号が整理され、公式化する方法が考案されていたならば、河野のそれらは現代の基本形とまったく変わらないのである。この点に「八線表根新術」の一つの特徴がある。

嘗て、藤原松三郎は「八線表根新術」の後段に登場する倍術、折術、接術、截術の4術を見て、“これは建部賢弘の書に依ったものではないかと思われる[20]”と評したことがある。藤原が建部賢弘の書と暗示するものは「弧率」や「算暦雑考」を指すのであろう。確かに建部はこれらの写本で弧背の求長法の研究に関連して“倍術”“三雙術”“折術”“接術”や“截術”の5術を用いていた。しかし、建部の手法は弧背、弦および矢の長さを既知として、これらより5術を駆使して問うところの弦や矢の長さを求めるものであった。その計算法は極めて幾何学的であり、河野が三角法の公式で直接的に正弦や余弦値を求めようとしたことと大きく異なっている。

もっとも、建部の5術を現代的視点で評価すれば、河野が用いた三角法の基本公式と同質であると言える。だが、建部には角度の考え方が極めて希薄であったこと、また角度概念に関連して三角法の知識が未熟であったことを併せ考えるならば、両者の間には異質の結果が横たわっていると指摘しなければならない。

河野が、建部の「弧率」や「算暦雑考」から倍術、折術、接術、截術を知り得て、これらを自らの研究に応用することを思いついたのであろう。建部以後の弧背や三角法の研究にあって4術を用いようとした研究者が居ることを筆者は寡聞にして知らない。そのような意味において、河野の「八線表根新術」は建部の研究の影響を受けた一冊である、と言えるであろう。もっとも河野は三雙術を除く4術で処理していた。建部の三雙術は三倍角公式にあたっているが、河野はこれを倍術に含めて扱っているのである。こうした公式の分類もさることながら、決定的な違いとして河野の4術は西洋数学の直接的影響の結果であると断言しなければならない。すなわち、河野は西洋の三角法の基本公式を建部の術語を借りて表現しようとしたのである。

では河野にとって新術の意味は何処にあったのであろうか。それは、まず、円理角術を用いて a_n を任意に求めることができたことにある。だが、a_n を無限級数展開で求めることは松永良弼の研究以来一般的に知られるようになっていた。よって、松永良弼の式を用いたのでは新術とは名乗れないことになる。そこで河野は、三角法の公式を援用することを思いついたのではなかったか。すなわち a_n を求める式(1)を使えば正弦値は確実に求めることができる。しかしそれでは各差を逐一計算するために多くの時間と労力を要する。そこで三角法の公式を用いれば、短時間で計算できることに活路を見出したのではなかったか。(平成17年01月06日訂)

〔謝辞〕 本研究は平成16年度文部科学省特別領域研究(1)「江戸のモノづくり」天文暦学班 A-3 によって行われた。資料の調査にあたっては日本学士院、東北大学付属図書館、国立天文台付属図書館ならびに同天文台中村士氏、伊藤節子氏および新湊市博物館などから格別のご配慮を戴いた。文末ながらこの場を借りて各位のご厚誼に御礼申し上げます。

注

(1) 日本学士院編『明治前日本数学史』、第5巻、新訂版、1979年、p.458に引用される「小出長十郎算術稽古成立書」には、三角関数表の作成に掛かる費用の一部が“河野主計助”から河野の門人にして当時京都で活動していた加賀の“茶室金四郎”へ配られる旨が記されている。

(2)河野通禮編述『渾天新語』(文化六:1809 年刊、東北大学付属図書館収蔵狩野文庫:登録番号 21315 を参照)の序文第 2 丁ウ。

(3)平成 16 年 8 月 25 日の筆者の発表において、河野通禮と加賀の暦算家河野通義(1792-1851)を同一人物として論じたが、これは明らかな間違いであった。ここに発表時に配布した予稿における河野の生涯と業績に係わる記述を訂正しておきたい。

(4)富山県教育委員会編『高樹文庫目録』、富山県教育委員会、昭和 54 年、p.135。

(5)前掲『渾天新語』下巻、後叙第 1 丁ウ。

(6)先の注(3)と同様に、予稿では河野は“京都の暦算家土御門家に関係をもつ人物なのであろう”と記したが、具体的な調査は後日に期することにする。

(7)河野の著作の調査にあたっては、『日本学士院所蔵和算資料目録』(岩波書店、2002 年)、平山諦編『東北大学岡本文庫』(自家版、昭和 44 年)、平山諦編『東北大学の天文暦書狩野文庫の和算天文暦書』(自家版、昭和 39 年)、平山諦編『東北大学林文庫目録』(自家版、昭和 47 年)、富山県教育委員会編『高樹文庫目録』(富山県教育委員会、昭和 54 年)、国立天文台天文情報公開センター暦計算室編『国立天文台所蔵貴重資料展示図録』(国立天文台、平成 12 年)などを参照した。

(8)「応元暦書」の成立年紀については前掲『明治前日本数学史』、第 5 巻、p.460 を参照した。なお、筆者が調査した東北大学付属図書館収蔵狩野文庫:登録番号 20877 には写本成立を確認できる年紀は無かった。また同書は巻 6 から巻 11 までの“八線表”、巻 12 の“日躔表”、巻 13 から巻 17 までの“月離表”が含まれていない。五巻すべての巻末に“藤原牧之　印”とする署名と印がある。

(9)東北大学付属図書館収蔵狩野文庫の同書(登録番号 20895)では、最終丁末尾に“文政九歳次丙戌年小暑日右五星諸応及諸数解義　謙斎政良識”とある。文政 9 年は西暦 1826 年にあたる。

(10)前掲『高樹文庫目録』、p.135。

(11)前掲『明治前日本数学史』、第 5 巻 p.458 では宮の字を寶と記しているが、これは宮が正しい。

(12)「暦法新書」(国立公文書館内閣文庫蔵書:請求番号 194-157)。ただし、本論文では浅見恵・安田健編『近世歴史資料集成第Ⅲ期　第Ⅷ巻日本科学技術古典籍資料／天文学編【1】』(科学書院、2000 年)に収録される「暦法新書」の pp.523-701 を参照した。

(13)前掲『近世歴史資料集成第Ⅲ期　第Ⅷ巻日本科学技術古典籍資料／天文学編【1】』に収録される「新法暦書」の pp.703-896 を参照した。

(14) 本論文では雍正元(1723)年版『暦算全書』を参照した。

(15)前掲『暦算全書』中『解八線割圓之根』第 1 丁ウ。

(16)前掲『解八線割圓之根』第 3 丁オ-第 15 丁ウ。

(17)前掲『解八線割圓之根』第 17 丁ウ-第 19 丁オ。

(18)前掲『解八線割圓之根』第 20 丁ウ-第 21 丁ウ。

(19)前掲『解八線割圓之根』第 22 丁ウ。

(20)前掲『明治前日本数学史』、第 5 巻、p.459.